

Mumford-Shah 模型在图像分割中的研究

冯志林 尹建伟 陈刚 董金祥

(浙江大学计算机科学与工程系, 杭州 310027)

摘要 介绍了图像分割中的 Mumford-Shah(MS)模型,提出了一种新的 MS 模型的数值求解方法。首先在数学上指出了 MS 泛函弱解在 SBV 函数空间中的存在性,然后讨论了计算弱解的数值逼近方法。为了得到 MS 泛函的数值解,首先定义了自适应三角剖分空间上的离散型 MS 泛函,然后在每次迭代前对有限元网格进行相应的自适应调整,接着采用拟牛顿最小化方法,并通过收敛意义上的离散有限元逼近,得到离散型 MS 泛函在每次迭代中的最小值。实验结果表明,该方法适合含噪图像的分割,是一种有效的图像分割算法。

关键词 Mumford-Shah 泛函 有限元 三角剖分 有界变分

中图分类号: TP391.4 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2004)02-0151-08

Research on the Mumford-Shah Model in Image Segmentation

FENG Zhi-Lin, YIN Jian-Wei, CHEN Gang, DONG Jin-Xiang

(Department of Computer Science and Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract The Mumford-Shah model has been well acknowledged as an important method for image segmentation. The paper discusses the problem of simultaneous image segmentation and smoothing by approaching the Mumford-Shah paradigm from a numerical approximation perspective. In particular, a novel method for the numerical solving of the Mumford-Shah model is proposed. First, the paper presents mathematically the existence of a solution in the weak formulation of SBV space. Then some approximations and numerical methods for computing the weak solution are discussed. Finally, a minimization method based on the quasi-Newton algorithm is put forward. The method can find the absolute minimum of the functional in each iteration. Considering the important role of a discrete finite elements approximation method in the sense of Γ -convergence, an adjustment scheme for adaptive triangulation is used to improve the efficiency of iteration before the current iteration begins. Experiment results show that the proposed algorithm can be simultaneously used to image segmentation and smoothing, and the performance of the algorithm is satisfactory.

Keywords Mumford-Shah functional, finite element, triangulation, bounded variation

引言

近年来,基于变分法的 Mumford-Shah(MS)泛函模型^[1]日益成为图像处理领域中一种有效而强大的研究工具。与常规的基于统计的图像处理方法相比,基于变分法的 MS 泛函模型无论在理论上还是在数值计算上都具有很强的优势,它可以直接对一些重要的视觉几何特征,如梯度、切线和曲率等进行操纵,并且在数值计算上可以利用变分法中成熟的

数值方法理论来进行实现。MS 泛函模型的引人之处还在于它为图像处理和计算机视觉领域中的许多问题提供了统一的解决办法,例如许多研究者已将其成功地应用于图像分割和边缘提取^[2]、三维立体重构^[3]、阴影恢复形状^[4]等领域。

基于变分法的 MS 泛函模型,利用目标对象边缘曲线的特定规律,定义同质连通区域和对象边缘的能量函数,通过最小化能量函数使原图像分割成同质的连通区域,并使曲线函数能够逼近目标对象的边缘。由于在 MS 泛函模型中是通过变分法将图

像分割问题转化为泛函极值的问题,因此可利用许多近代数学工具来对泛函极值解的性质进行论证。早期 MS 泛函模型是建立在 C^1 类函数空间上的,具有很大的局限性。Giorgi 和 Ambrosio 等人为此提出了 MS 泛函的弱形式,将原泛函放宽到一类称为特殊有界变分 $SBV(\Omega)$ 的函数空间上。但是弱形式 MS 泛函的数值计算是比较困难的,这主要是因为数值计算中需要对未知的边缘长度项进行处理,为此许多学者做了大量研究。Ambrosio 和 Tortorelli 提出利用一个辅助函数来逼近边缘长度项的特征函数,并通过椭圆泛函来进行变分逼近,但是该方法不能处理边缘能量表示比较复杂的情况^[5];Chambolle 等人利用有限差分法对泛函进行求解^[6],但该方法缺乏足够的灵活性。由于有限元法具有精度高、可模拟任意复杂结构、易于进行边界处理等优点,因此许多学者采用有限元法来进行泛函的数值逼近^[7]。采用有限元法进行泛函的极小化不仅比有限差分法更易于实现,而且它可以允许在极限泛函中引入各向异性的性质,因此处理起来更加灵活。此外由于有限元实现中采用了基于非局部逼近的自适应网格,因此所需的参数要比有限差分法少。

但是只依赖有限元网格逼近所产生的效果有时不能令人满意,为此在有限元网格逼近的基础上,提出一种新的 MS 泛函逼近的数值算法,即在每次迭代中通过结合拟牛顿最小化算法和有限元网络的自适应调整算法来对 MS 泛函进行逼近求解。通过拟牛顿最小化算法不仅能够使每次迭代目标泛函数值有所下降,而且可以确保逼近过程中满足全局收敛性,避免陷入局部极小。有限元网络的自适应调整则可以为下次迭代提供自适应最优三角剖分结构,从而有利于提高下一次迭代的效率和响应速度。由于 MS 泛函逼近的方法在对图像进行分割和边缘检测的同时还进行了噪声去除,因此它在图像分割处理上具有明显的优势。

2 Mumford-Shah 的数学模型

MS 泛函模型通过对目标对象边缘曲线特定规律的利用,在强度变化很小的同质区域采用分片光滑函数表示,而在强度变化非常剧烈的区域边界上用短的光滑曲线的并集来表示。因此,MS 泛函中包含了表征同质连通区域和对象边缘的能量。MS 泛函模型通过最小化能量函数使原图像分割成同质的连通区域,并使函数的不连续点集逼近目标对象的

边缘,从而实现了对图像的有效分割。形式上,弱形式 MS 泛函为

$$MS(u) = \int_{\Omega, S_u} |\nabla u|^2 dx + \alpha H^1(S_u) + \beta \int_{\Omega, S_u} |u - g|^2 dx \quad (1)$$

其中, Ω 是满足 Lipschitz 边界条件的有界开集, g 是输入图像, u 是分割所得图像, ∇u 是 u 的近似梯度, S_u 是 u 的本性不连续点所形成的边缘集, H^1 是一维 Hausdorff 测度, α, β 为两个正的权值参数。泛函 $MS(u)$ 的 3 个组成项 $\int_{\Omega, S_u} |\nabla u|^2 dx$, $H^1(S_u)$ 和 $\int_{\Omega, S_u} |u - g|^2 dx$ 分别对应于 u 的光滑度、边缘长度和保真度约束,其中光滑度约束确保 u 在 $\Omega \setminus S_u$ 上充分光滑;边缘长度约束确保边缘不致填满整幅图像;保真度约束确保分割前后的图像不致偏差太大。

由于弱形式 MS 泛函是建立在一类称为特殊有界变分 $SBV(\Omega)$ 的函数空间上,为此给出以下相关的基本概念。

定义 1 如果 $u \in L^1(\Omega; \mathbf{R}^n)$ 的广义导数 Du 为向量测度,且全变分 $|Du|(\Omega) < +\infty$,则称 u 是有界变分(bounded variation)函数,并记有界变分函数空间为 $BV(\Omega)$ 。 Du 的全变分(total variation)定义为 $|Du|(\Omega) = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx; \varphi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbf{R}^n), \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\} < +\infty$ 。

定义 2 设 $u \in BV(\Omega)$,如果对 $x \in \Omega$ 不存在 $z \in \mathbf{R}$,使 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-n} \int_{B_\rho(x)} |u(y) - z| dy = 0$ 成立,则称 x 是 u 的近似不连续点,其中 $B_\rho(x)$ 是中心在 x 、半径为 ρ 的球。 u 的近似不连续点集 S_u 构成了 u 的边缘,它的 Lebesgue 测度是可忽略的。

性质 1 如果 $u \in BV(\Omega)$,则 S_u 是可数 $(H^{n-1}, n-1)$ 可求长(rectifiable),即存在可数子集族 $\{K_i\}_{i=1}^\infty$, K_k 为 C^1 类 $(n-1)$ 维流形 Γ_i 的紧致子集,以及关于 H^{n-1} 测度可忽略的集合 N ,使得 $S_u = (\bigcup_{i=1}^\infty K_i) \cup N$,且 $H^{n-1}(N) = 0$ 。

可见 S_u 在除一个 H^{n-1} 可忽略的子集 N 外,可以被可数多个 C^1 流形的紧致子集 $\{K_i\}_{i=1}^\infty$ 所覆盖。由于 S_u 是可数 $(H^{n-1}, n-1)$ 可求长的,因此可定义单位法向量 ν_u 为 S_u 到 $n-1$ 维球面 A^{n-1} 的映射,即如果 $x \in K_i$,则 $\nu_u(x)$ 为 Γ_i 在 x 处的单位法向量。

定义 3 设 $u \in BV(\Omega)$, 如果对 $x \in \Omega$ 有 $u^-(x)$, $u^+(x) \in \mathbf{R}^n$ 和 $v_u(x) \in A^{n-1}$, 使得 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-n} \int_{B_\rho^\pm(x, v)} |u(y) - u^\pm(x)| dy = 0, B_\rho^\pm(x, v) = \{y \in B_\rho(x); \pm \langle y - x, v_u(x) \rangle > 0\}$ 成立, 并且 $u^+(x) \neq u^-(x)$, 则称 x 是 u 的跳跃点, $u^-(x)$, $u^+(x)$ 为 u 在 x 上的内外迹。

定义 4 设 $u \in BV(\Omega)$, 由 Lebesgue 分解定理, $Du = D_a u + D_s u$, 其中 $D_a u$ 和 $D_s u$ 分别为 Du 关于 Lebesgue 测度的绝对连续部 (absolute part) 和奇异部 (singular part)。奇异部 $D_s u$ 在 S_u 和 $\Omega \setminus S_u$ 上的限制分别称为跳跃部 (jump part) $D_j u$ 和康托部 (cantor part) $D_c u$, 并记 $D_j u = D_s u|_{S_u}, D_c u = D_s u|_{\Omega \setminus S_u}$ 。

$D_j u$ 关于 H^{n-1} 是绝对连续的, 并可写成 $D_j u = |u^+(x) - u^-(x)| H^n|_{S_u}, D_c u$ 关于 H^{n-1} 是可忽略的, 即对任意 $H^{n-1}(E) < +\infty$ 的集合 E , 有 $D_c u(E) = 0$ 。

定义 5 设 $u \in BV(\Omega)$, 如果康托部 $D_c u$ 为 0, 则称它是特殊有界变分函数, 并记特殊有界变分函数组成的空间为 $SBV(\Omega)$ 。

定义 6 设 $u \in SBV(\Omega)$, 如果对任意的 $k > 0$ 和紧包含子集 $\Omega' \subset \subset \Omega, u$ 的截断函数 $u_k = (u \wedge k) \vee (-k)$ 属于 $SBV(\Omega')$, 则称它是广义特殊有界变分函数, 并记广义特殊有界变分函数组成的空间为 $GSBV(\Omega)$ 。其中 $X \wedge Y = \min(X, Y), X \vee Y = \max(X, Y)$ 。

Ambrosio 证明了 $GSBV(\Omega)$ 函数具有下面的紧致性和下半连续性。

定理 1 设 $\Omega \in \mathbf{R}^2$ 是满足 Lipschitz 边界条件的有界开集, $\{u_j\}$ 是 $GSBV(\Omega)$ 中的一个序列, 如果存在常数 c , 对任意的 j 都满足

$$\int_\Omega |\nabla u_j|^2 dx + H^1(S_{u_j}) + \|u_j\|_{L^2(\Omega)} \leq c < +\infty$$

那么存在 $\{u_j\}$ 的子序列 $\{u_k\}$ 和函数 $u \in GSBV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, 使得

- (1) $u_k(x)$ 在 Ω 中几乎处处收敛到 $u(x)$;
- (2) ∇u_k 在 $L^2(\Omega; \mathbf{R})$ 上弱收敛到 ∇u ;
- (3) $H^1(S_{u_k}) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} H^1(S_{u_k})$ 。

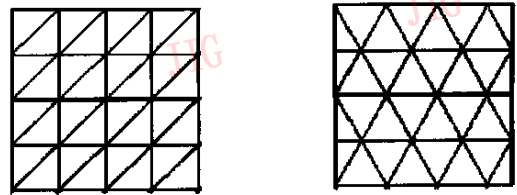
由定理 1 可立即推出 MS 泛函也具有下半连续性, 即 $MS(u) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} MS(u_k)$, 从而确保了 MS 泛函弱极值 u 的存在。进一步地, 当 S_u 是本性闭的, 即 $H^1(\overline{S_u} \setminus S_u) = 0$ 时, Giorgi 和 Carriero 等人证明 MS 泛函在 $GSBV(\Omega)$ 中的弱极值也是它的强极值^[5]。

3 MS 泛函的离散化和 Γ 收敛

由于弱形式 MS 泛函式(1)中包含了对未知项 S_u 的测度, 要在数值计算中对它进行处理是比较困难的。为此需要首先得到不包含 S_u 测度项的离散型泛函, 然后再对该离散型泛函进行 Γ 收敛逼近, 并在收敛极限中得到包含 S_u 测度项的弱形式 MS 泛函。

3.1 离散型 MS 泛函

设 $\Omega \in (0, 1) \times (0, 1)$ 是 \mathbf{R}^2 上的有界矩形区域, ϵ 是三角元边的最大长度, 2 种形式的三角剖分 $T_\epsilon^i (i = 1, 2)$ 如图 1 所示。



(a) T_1^i

(b) T_2^i

图 1 2 种不同形式的三角剖分

图 1(a) 中的三角元是等腰直角三角形, 图 1(b) 中的三角元是等边三角形。 $V_\epsilon^i(\Omega)$ 是片仿射函数在 T_ϵ^i 上的有限元空间, $\{T_\epsilon^i\}$ 是 $\epsilon_j \rightarrow 0$ 的三角剖分序列。

Chambolle 和 Maso 等人提出的离散型泛函虽然可以 Γ 收敛到 MS 泛函, 但是该离散型泛函所依赖的仿射函数有限元空间 $V_{\epsilon, \theta}^i(\Omega)$ 不仅和三角元长度 ϵ 有关, 而且还与三角元的旋转角度 θ 有关^[7]。只有当 θ 充分小时, 离散型泛函才能 Γ 收敛到 MS 泛函, 这在数值化计算中是非常难处理的。为此, 提出了一种改进的方法, 即在每次迭代中只在含单参数的 ϵ 仿射函数有限元空间中进行离散型泛函的拟牛顿最小化逼近, 然后通过一个网格自适应调整过程, 构造出下一次迭代所需的网格结构, 从而使仿射函数有限元空间只和三角元长度有关。

改进后 $V_\epsilon^i(\Omega) \times T_\epsilon^i(\Omega)$ 的函数空间上的离散型 MS 泛函为

$$F_\epsilon(u, T) = \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega f(\epsilon |u_T|^2) dx + \int_\Omega |u_T - g|^2 dx \quad (2)$$

其中, T 表示三角剖分结构, $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 是一个非递减函数, 且

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 1 \text{ 和 } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = f_\infty < +\infty$$

3.2 离散型泛函的 Γ 收敛

一旦得到离散型 MS 泛函式(2)后,就必须采用合适的收敛类型来对 MS 泛函进行数值逼近。由于 Γ 收敛是一种适合于变分问题数值计算的收敛类型,因此用它来进行离散型 MS 泛函式(2)的数值收敛。

定义 7 设 (X, d) 是度量空间, $F_k: X \rightarrow [0, +\infty)$ 是函数序列,对 $u \in X$ 定义 F 的 $\Gamma(d) - \liminf$ 项和 $\Gamma(d) - \limsup$ 项

$$\begin{aligned} F^1(u) &= \Gamma(d) - \liminf_{k \rightarrow +\infty} F_k(u) \\ &= \inf_{u_k \rightarrow u} \{ \liminf_{k \rightarrow +\infty} F_k(u_k) : \lim d(u_k, u) = 0 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^2(u) &= \Gamma(d) - \limsup_{k \rightarrow +\infty} F_k(u) \\ &= \inf_{u_k \rightarrow u} \{ \limsup_{k \rightarrow +\infty} F_k(u_k) : \lim d(u_k, u) = 0 \} \end{aligned}$$

如果 $F^1(u) = F^2(u)$,则称它们的公共值为函数序列 $\{F_k\}$ 在 u 上的 Γ 极限,并记作 $\Gamma(d) - \lim_{k \rightarrow +\infty} F_k(u)$ 。

在三角剖分序列的 Γ 收敛中,令

$$F^1(u) = \Gamma(d) - \liminf_{j \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_j}(u, T_j)$$

$$F^2(u) = \Gamma(d) - \limsup_{j \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_j}(u, T_j)$$

定理 2 对每一个 $\varepsilon_j \rightarrow 0$ 的三角剖分序列 $\{T_{\varepsilon_j}^i\}$,存在一个凸的、齐次函数 $\varphi_i: \mathbf{R}^2 \rightarrow [0, +\infty)$,使得三角剖分有限元空间 $V_{\varepsilon_j}^i(\Omega) \times T_{\varepsilon_j}^i(\Omega)$ 上的离散型泛函

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon_j}(u, T_j) &= \frac{1}{\varepsilon_j} \int_{\Omega} f(\varepsilon_j |\nabla u_{T_j}|^2) dx + \\ &\quad \int_{\Omega} |u_{T_j} - g|^2 dx \end{aligned} \quad (3)$$

关于 L^2 流形 Γ 收敛到 $L^2(\Omega) \cap GSBV^2(\Omega)$ 函数空间上的 MS 泛函

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + f_{\infty} \int_{S_u} \varphi_i(\nu_u) dH^1 + \\ &\quad \int_{\Omega} |u - g|^2 dx \end{aligned} \quad (4)$$

定理 2 的证明包含 $F^2(u) \leq F(u)$ 和 $F(u) \leq F^1(u)$ ^[7]。 $F(u)$ 是 MS 泛函式(1)的一种各向异性形式,由于在几何三角剖分中引入了各向异性,因此 $F(u)$ 中的 $\varphi_i(\nu_u)$ 是需要明确计算的。

定义 8 设线段 $S \subset \Omega$ 的法向量为 ν ,各向异性函数 $\varphi_i(\nu)$ 是 S 在 $T_{\varepsilon}^i(\Omega)$ 诱导的拓扑中的 Minkowsky 容度(content),它是对覆盖面积测度 $|A_{\varepsilon}^i|$ 和 S 的管状邻域测度比值极限的度量,即

$$\varphi_i(\nu) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|A_{\varepsilon}^i|}{\varepsilon^{H^1(S)}}$$

其中, $A_{\varepsilon}^i = \{T \in T_{\varepsilon}^i(\Omega) | T \cap S \neq \emptyset, |T \cap \{x = S + t\nu | t \geq 0\}| \neq 0\}$ 。

图 2 对比了图 1 两种三角剖分结构下的水平曲线 $\{\varphi_i(\nu) = 1\}$ 和单位圆的位置情况,从中可以看出 $\varphi_i(\nu)$ 反映了网格的对称属性,水平曲线越接近于单位圆,则三角剖分结构的各向异性属性就越弱。测度比值 $a_i = M_i/m_i$ 有效反映了网格的各向异性属性的强弱程度,其中 $M_i = \sup\{\varphi_i(\nu) : |\nu| = 1\}$, $m_i = \inf\{\varphi_i(\nu) : |\nu| = 1\}$, a_i 被称为网格的各向异性强度。图 1 中三角剖分结构的各向异性度强度分别为 $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}/2}$, $a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}/2}$,可见前一种结构的各向异性更强。

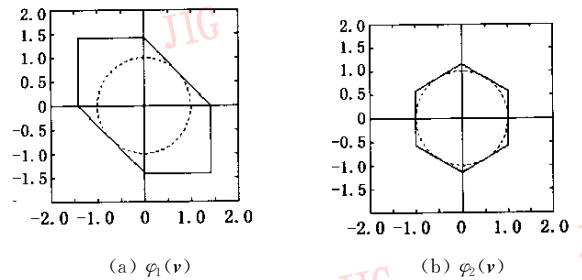


图 2 水平曲线和单位圆的位置比较

4 MS 泛函最小化的数值算法

由于离散型泛函 $F_{\varepsilon}(u, T)$ 不仅和函数 u 相关,同时还和 u 的自适应最优三角剖分结构 T 相关,因此算法实现的难点主要是在每次迭代过程中关于函数 u 的自适应最优三角剖分结构 T 的获取,考虑到函数 u 本身就是本次迭代希望得到数值项,因此它是不可预知的。由于第 $j-1$ 次迭代计算得到的逼近值 u_{j-1} 和第 j 次迭代的 u_j 在某种意义上是接近的,因此可利用 u_{j-1} 来代替 u_j 得到第 j 次迭代的自适应最优三角剖分结构 T_{ε_j} 。通过 u 和 T 之间松弛迭代得到的 MS 泛函最小化算法的框图如图 3 所示。

4.1 拟牛顿最小化算法

由于离散型泛函 $F_{\varepsilon}(u, T)$ 是非凸的,容易陷入局部极小值,因此标准的极小化算法在此情况下是失效的。通常模拟退火算法可以克服上述缺陷,但是由于它是随机的,并且未知解的个数非常多,因此它对 $F_{\varepsilon}(u, T)$ 极小化的效率是极低的。拟牛顿法是无约束最优化方法中最有效的一类算法,当迭代过程中的 Hessian 矩阵 $\nabla^2 F(u_k)$ 正定时,算法产生的方向均为下降方向,并且这类算法具有二级收敛速率。

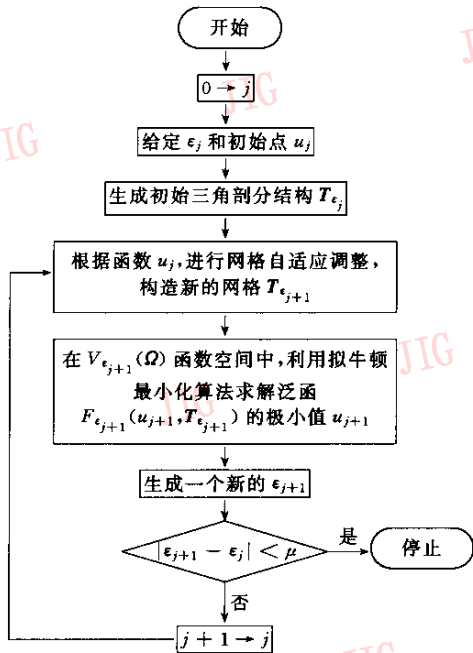


图 3 MS 泛函的松弛迭代最小化算法框图

泛函 $F_\epsilon(u, T)$ 的极小化过程就是生成收敛到 F 极值点的函数序列 $\{u_k\}$ 。一旦给定初始点 u_0 后拟牛顿算法将生成一个无穷序列, 形式上该序列可表示为 $u_{k+1} = u_k + t_k d_k$, 其中 t_k 是从点 u_k 出发沿 d_k 牛顿方向搜索的最优步长, 它是 $[0, 1]$ 内的标量, $d_k \in \mathbb{R}^n$ 是下降方向。

在给出泛函 $F_\epsilon(u, T)$ 的拟牛顿最小化算法之前, 首先证明该泛函极小值的存在性。由于泛函 $F_\epsilon(u, T)$ 在确定了本次迭代的自适应最优三角剖分结构 T 后, $F_\epsilon(u, T)$ 将只和函数 u 相关, 因此只需讨论泛函 $F_\epsilon(u)$ 极小值的存在性。由于 $F_\epsilon(u)$ 定义在 $SBV(\Omega)$ 空间上, 且 $SBV(\Omega)$ 空间属于 Banach 空间, 因此 $F_\epsilon(u)$ 本身也属于 Banach 空间, 从而有 $F_\epsilon(u): V \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 V 表示 Banach 空间。

定义 9 设 $\bar{u} \in U, U$ 为 V 的子集, 如果存在 \bar{u} 的一个邻域 $V(\bar{u})$, 使得对 $\forall u \in U \cap V(\bar{u})$, 有 $F_\epsilon(\bar{u}) \leq F_\epsilon(u)$, 则称 $F_\epsilon(\bar{u})$ 是 $F_\epsilon(u)$ 在 U 中的相对极小值。

定义 10 设 $\bar{u} \in U, U$ 为 V 的子集, 如果对 $\forall u \in U$, 有 $F_\epsilon(\bar{u}) \leq F_\epsilon(u)$, 则称 $F_\epsilon(\bar{u})$ 是 $F_\epsilon(u)$ 在 U 中的绝对极小值。

由于 $SBV(\Omega)$ 空间属于自反 Banach 空间, 因此 $F_\epsilon(u)$ 也属于自反 Banach 空间; 同时由定理 1 可知 $F_\epsilon(u)$ 是弱下半连续的, 根据这些条件可以证明 $F_\epsilon(u)$ 极小值的存在性。

定理 3 设 U 是 $F_\epsilon(u)$ 中的有界弱闭子集, 则 $F_\epsilon(u)$ 在 U 中存在一个绝对极小值。

证明: 设 l 是 $F_\epsilon(u) (u \in U)$ 的下确界, u_n 是一个极小化序列, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\epsilon(u_n) = l, u_n \in U$$

由于 $u_n \in U$, 且 U 有界, 故序列 u_n 有界。由于 $F_\epsilon(u)$ 是自反的, 故可以找到一个子序列 $u_{n'}$, 使得当 $n' \rightarrow \infty$ 时, 有 $u_{n'} \rightarrow \bar{u}$ 。

由于 u 是弱闭的, 因此 $\bar{u} \in U$ 。又由于 $F_\epsilon(u)$ 是弱下半连续的, 故 $F_\epsilon(\bar{u}) \leq \liminf_{n' \rightarrow +\infty} F_\epsilon(u_{n'})$, 由此 $F_\epsilon(\bar{u}) \leq l$ 。由于 l 是 $F_\epsilon(u)$ 在 $u \in U$ 上的下确界, 于是得到 $F_\epsilon(\bar{u}) = l$ 。这就证明了 $F_\epsilon(\bar{u})$ 是 $F_\epsilon(u)$ 在 U 上的绝对极小值。

此外, 由于泛函 $F_\epsilon(u)$ 具有局部 Gateaux 可导性^[8], 因此能够满足拟牛顿最小化算法的实施条件。根据定理 3 和 $F_\epsilon(u)$ 的 Gateaux 可导性, 设计适用于泛函 $F_\epsilon(u)$ 的拟牛顿最小化算法, 算法框图如图 4 所示。

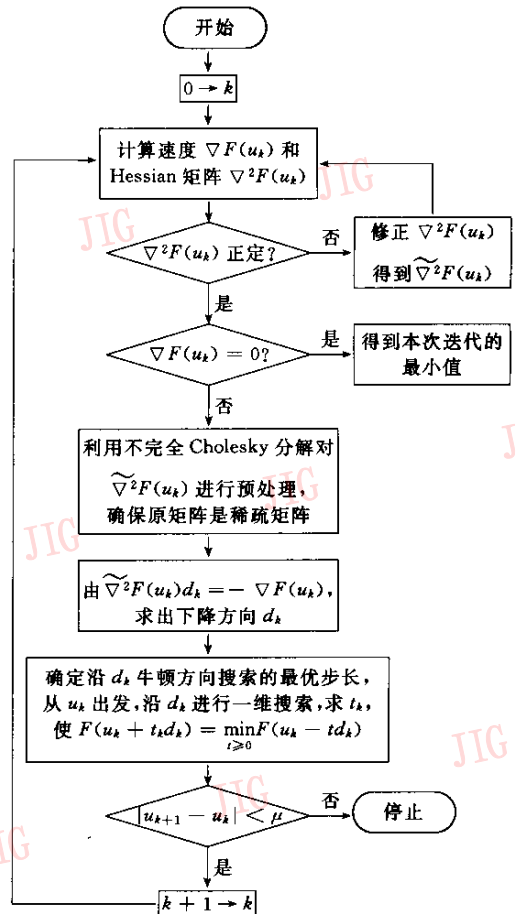


图 4 泛函 $F_\epsilon(u)$ 的拟牛顿最小化算法框图

对于上述算法, 需要指出以下几点:

(1) $\nabla^2 F(u_k)$ 的修正: 在 $\nabla^2 F(u_k)$ 对角线上引入小的扰动, 构造一个对称正定矩阵 $\tilde{\nabla}^2 F(u_k) =$

$\nabla^2 F(u_k) + \varepsilon_k \mathbf{I}$, 其中 \mathbf{I} 是 n 阶单位矩阵。由 Gershgorin 定理可知, 只要 ε_k 选择适当, 则 $\widetilde{\nabla^2 F}(u_k)$ 就是对称正定矩阵。事实上, 如果 α_k 是 $\nabla^2 F(u_k)$ 的特征值, 那么 $\alpha_k + \varepsilon_k$ 就是 $\widetilde{\nabla^2 F}(u_k)$ 的特征值, 从而保证了 $\widetilde{\nabla^2 F}(u_k)$ 的正定性。进一步地, 为了确保解的适定性, 应使 $\varepsilon_k > \eta$, 其中 η 是一个正参数。

(2) 由于 MS 泛函模型涉及光滑度、边缘长度和保真度约束这 3 项指标, 为了实现对上述指标协同处理, 需要选择合适的最优步长 t_k 。通常最优步长 t_k 没有一个简单的计算公式^[9], 采用满足 Wolfe 条件的线搜索 (line search) 算法来实现最优步长的选择, 效果令人满意。线搜索算法的具体实现过程可参见文献[9]。

(3) 不难证明, 拟牛顿算法在给定初值 u_0 后可以收敛到 F 在本次迭代中的最小值, 此外由于 t_k 是由一维搜索得到的最优步长, 每次迭代目标函数值一般有所下降, 而决不会上升, 因此在一定条件下可以保证算法具有全局收敛性。

4.2 有限元网格自适应调整

为了生成自适应的几何三角剖分, 使用了一个由 INRIA 开发的自动网格生成软件包 BL2D。在该软件包中利用已生成的背景网格来对前景网格进行自适应调整。对三角剖分结构进行最优化的目的是使边缘附近的三角元具有较高的各向异性比, 且三角元的方向和边缘平行, 而在远离边缘的区域, 三角元的各向异性比近似为 1。但是由于在最小化过程中, 理论上的边缘集是未知的, 因此前景网格就必须从背景网格估计得到。在 BL2D 中, 前景网格是通过一个“估计子”从背景网格构造出来的。估计子根据背景网格中每点的度量来给出。度量由一个含 3 个系数的对称正定 2×2 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ 决定, 其中原点的度量是指满足方程 $(x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} (x \ y)^T = 1$

的系数 (a, b, c) , 其中 (x, y) 为所有和原点相距为 1 的点。由于该方程可用中心在原点的椭圆方程来表示, 因此当椭圆旋转 θ 角后, 矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ 可表示为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

其中系数 (θ, h_1, h_2) 分别表示椭圆的旋转角度以及横向和纵向的尺度因子。

在每次进行网格自适应调整前, 只需根据函数 u 来设置横向和纵向的各向异性值 h_1 和 h_2 以及旋转角度 θ 。在给定背景网格上每点的度量后, 就可以构造出形如 Delaunay 几何三角剖分的前景网格。上述自适应网格的完整构造算法可参见文献[10]。

5 实验结果及分析

设图像域 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $V_\varepsilon(\Omega)$ 函数空间上的离散型 MS 泛函

$$F_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \alpha \frac{2}{\pi} \arctan \left(\varepsilon \frac{\beta}{\alpha} \frac{\pi}{2} |\nabla u|^2 \right) dx + \int_{\Omega} |u - g|^2 dx$$

利用离散泛函的最小化数值算法进行如下两个实验:

实验一 比较有限元网格的各向异性强度对分割效果所产生的影响。在图 5 中显示了合成图像在不同的三角剖分网格中所得到的不同分割效果, 其中图 5(a) 为待分割的原图, 图 5(b) 为采用图 1(a) 网格所得到的分割图像, 图 5(c) 为采用图 1(b) 网格所得到的分割图像。

在图 5(b) 的分割图中, 只在三角形的左半个区域产生了不连续点集所组成的边缘, 而在右半个区域大致呈现为光滑。在图 5(c) 的分割图中, 由于各向异性的强度相对较弱, 尽管在整个分割图像中都

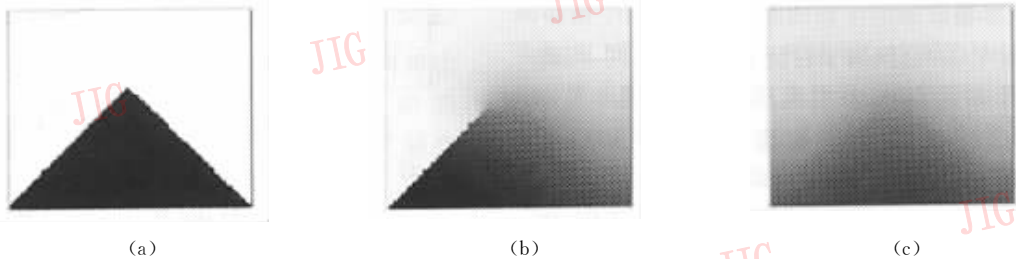


图 5 各向异性强度对分割效果的影响

较为光滑,即在左半个区域和右半个区域都没有生成很明显的边缘,但是三角形的对称性却得到了有效地保留,而在图 5(b)中对称性没有得到有效地保留。从图中 5 可以看出网格的各向异性对分割效果的影响是各有利弊的。

实验二:对含噪合成图像进行试验,目的是为了获取有限元网格在每次迭代后进行自适应调整过程中的

状态,以及判断噪声干扰对算法实现的影响程度。

从图 6(d)和图 6(e)中可以看出基于 MS 泛函的最小化算法不仅可以检测出图像边缘所形成的不连续点集,而且还可以消除由噪声所产生的不连续点集,从而使分割免受噪声的干扰,确保分割结果的有效性。由此可见利用本文的方法对图像分割效果的提高是较显著的。

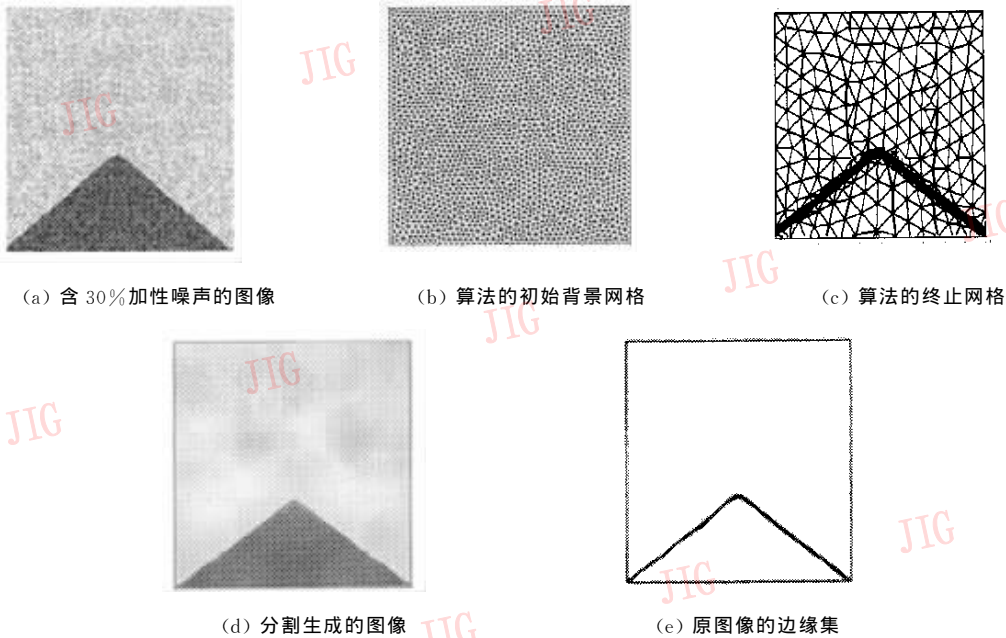


图 6 含噪图像的分割及网格自适应调整过程

在上两个实验的基础上,进一步对摄像机拍摄的自然图像进行分割测试。图 7 显示了算法对自然图像的分割,从图 7(b)可以看出算法对边缘细节信息的获取程度是令人满意的,找到了图像中较为精细的轮廓。

和有限元网格的自适应调整相结合的数值方法来对 MS 泛函的极值进行求解。实验结果表明,本文的图像分割算法具有较高的可靠度,因而具有一定的实用性。此外由于 MS 泛函模型不仅对图像分割问题,而且对三维立体重构、阴影恢复形状等领域的应用具有很好的借鉴意义,因此 MS 泛函模型的应用前景是非常广阔的。



图 7 自然图像的分割结果

参 考 文 献

- 1 Mumford D, Shah J. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1989, 42(5): 577~685.
- 2 Chambolle A. Image segmentation by variational methods: Mumford and Shah functional and the discrete approximations [J]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995, 55(3): 827~863.
- 3 Liedtke CE, Grau O, Grove S. Use of explicit knowledge for the reconstruction of 3d object geometry[A]. In: International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns[C], Campinas, Brazil, 1995: 580~587.

6 结 论

根据图像分割的结构特征,探讨了 MS 泛函模型在图像分割中的应用,并采用拟牛顿最小化算法

- 4 杨晓波, 黄秀宝. 基于阴影恢复形状的起皱织物表面形状重建研究[J]. 中国图象图形学报(A版), 2003, 8(2): 181~187.
- 5 Ambrosio L, Tortorelli V. Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via convergence[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1990, 43(3): 999~1036.
- 6 Massimo G. Finite difference approximation of the Mumford-Shah functional [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2000, 33(4): 197~228.
- 7 Chambolle A, Maso G D. Discrete approximation of the Mumford-Shah functional in dimension two[J]. Mathematical modelling and numerical analysis, 1999, 33(7): 651~672.
- 8 Alberti G, Ambrosio L. A Geometrical Approach to Monotone Functions in R^n [J]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999, 26(3): 259~316.
- 9 Nocedal J, Wright SJ. Numerical Optimization[M]. New York: Springer-Verlag, 1999: 220~263.
- 10 Borouchaki H, Laug P. The bl2d mesh generator: Beginner's guide, user's and programmer's manual[R]. Technical Report 0194. Paris: National Institute for Research in Computer Science and Control, 1996.



尹建伟 1974年生, 2001年于浙江大学计算机系获博士学位, 现为浙江大学计算机科学与工程系讲师。主要研究方向为智能CAD、CSCW等。



陈刚 1973年生, 1998年于浙江大学计算机系获博士学位, 现为浙江大学计算机科学与工程系副教授。主要研究方向为计算机辅助设计和信息安全等。



董金祥 1945年生, 浙江大学计算机科学与工程系教授, 博士生导师, 1969年毕业于浙江大学数力系, 1993~1994年留学美国。主要研究方向为计算机图形学、计算机辅助设计、CSCW等。在国内外核心期刊和国际会议上发表论文80多篇。



冯志林 1977年生, 2002年于杭州电子工业学院计算机系获硕士学位, 现为浙江大学计算机科学与工程系博士研究生。主要研究方向为计算机视觉、图像处理、模式识别等。